Schulstunde

So rechnet man mit

Quadratwurzeln
Teil 1

Datei Nr. 12198

Stand 10.1.2023

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK UND STUDIUM

www.mathe-cd.de

Vorwort

Ich gestalte diesen Einführungstext für die Quadratwurzeln so ähnlich, wie eine Schulstunde ablaufen kann. Mit etwas Fantasie könnte man sich hineinversetzen.

Er ist quasi eine Verkürzung des Textes 12200. Vielleicht liest du lieber dort weiter? Er enthält mehr darüber.

Inhalt

Ausblick:

In der 2. Schulstunde (12199) geht es um Rationalmachen des Nenners, Arbeiten mit binomischen Formeln.

Zu Beginn dieser wichtigen Stunde begrüße ich wieder alle Leser dieses Textes.

Ich habe heute ein kleines Problem. Ich weiß nicht, wie viel du schon über Quadratwurzeln weißt.

Daher werde ich an den Anfang eine einleuchtende Erklärung liefern, warum man Quadratwurzeln benötigt, und was das eigentlich sind. Ok?

Wenn dir das langweilig erscheint – weil du das schon weißt – dann überspringe den ersten Abschnitt-

1 Kannst Du Rechnungen rückgängig machen? und: Was sind Quadratwurzeln.

Ich schildere Dir drei Situationen:

$\boxed{1}$ Auf deinem Konto befinden sich 235 Euro. Die Onkel überweist Dir zu Weihnachten 50 Euro auf dein Konto. Als guter Kopfrechner hast du schnell herausgefunden dass du jetzt 285 € auf dem Konto hast. Das war die Rechnung: $235\ \boxed{+50} = 285$.

Doch nach Weihnachten kommt die Überraschung: Die Bank hat die Überweisung storniert.
Die 50 Euro wurden also wieder zurückgeholt. Deine Kopfrechenkunst ist wieder gefragt.

Du rechnest: $285\ \boxed{-50} = 235$

Damit hast du die Addition von 50 € wieder rückgängig gemacht: Durch eine Subtraktion!

$\boxed{2}$ Weihnachten steht vor der Türe, und du befindest dich in einem Shop. Du willst für deine drei Kumpels je eine CD kaufen. Eine kostet 8 €. In deinem Kopf rattern die Rädchen und sagen dir, dass du nun $8\,\boxed{\cdot 3} = 24$

Euro bezahlen musst. Als du wieder zuhause bist und feststellst, das sich dein Reichtum um 24 Euro reduziert hat, fragst du dich: Wieviel hat eigentlich eine CD gekostet?
Jetzt helfen dir deine mathematischen Fähigkeiten weiter, denn du beginnst zu rechnen:

$$24\,\boxed{:3} = 8$$

Aha, du kannst also auch eine Multiplilkation durch eine Division umkehren! Gut gemacht.

$\boxed{3}$ Als nächstes findest du dich in einem Baumarkt wieder. Du suchst nämlich eine quadratische Platte mit der Kantenlänge 25 cm. Der Verkäufer schneidet sie dir zu und drückt dir Platte und Rechnung in die Hand. Du bezahlst brav an der Kasse und schaust dann noch einmal auf den Kassenzettel. Da steht drauf: Platte mit 625 cm^2 - Preis 8,20 €.

Nun erschrickst du doch ein wenig: Du wolltest doch eine Platte die 25 cm lang und breit ist, wieso schreibt der Typ dann 625 cm^2 auf die Rechnung?
Da hört nun dein Verständnis auf. Du drehst dich um und stürmst in den Baumarkt zurück:
„Wie kommen Sie auf 625 cm^2?“ fragst du den Verkäufer.
Klären wir, was er berechnet hat? Du weißt es? Schön: Den Flächeninhalt eines Quadrats berechnet man indem man Länge mal Breite rechnet, oder was beim Quadrat dasselbe ist: Du quadrierst 25.

$$25^2 = 25 \cdot 25 = 625$$

Ok; alles ist nun gut.

Zu Hause sieht nun deine Freundin den Kassenzettel mit der Aufschrift:

Quadratische Platte mit 625 cm^2.

Daraufhin fragt sie dich: „Wie lang ist diese Platte?“

Du denkst nach, wie du ihr das erklären kannst: Man rechnet „Seite mal Seite = 625“

oder als Formel: $a \cdot a = 625$ oder so: $a^2 = 625$

Und schon sind wir bei unserem Thema: Du willst das Quadrieren rückgängig machen.

Die Aufgabe heißt	Das Quadrat einer Zahl ist 625, wie groß ist die Zahl?
Oder als Gleichung:	Gegeben ist $a^2 = 625$. Berechne a.
Du weiß jedoch:	625 ist das Quadrat von 25.

An dieser Stelle überlegen wir, welche Quadrate wir eigentlich kennen.

Das sind Quadrate:

$2^2 = 4$ $\quad 3^3 = 9$ $\quad 5^2 = 25$, $\quad \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$, $\quad (-5)^2 = 25$, $\quad (-3)^2 = 9$ usw.

Nun machen wir diese Quadrate rückgängig. Das schreibt man mit dem Wurzelzeichen $\sqrt{}$ so auf:

Quadrieren:	Umkehren:	
$2^2 = 4$	Also ist $\sqrt{4} = 2$	Man nennt 2 die Wurzel aus 4.
$3^2 = 9$	Also ist $\sqrt{9} = 3$:	Die Wurzel aus 9 ist 3.
$5^2 = 25$	Also ist $\sqrt{25} = 5$	Die Wurzel aus 25 ist 5.
$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$	Also ist $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$	Die Wurzel aus $\frac{9}{16}$ ist $\frac{3}{4}$.
$(-5)^2 = 25$	Also ist $\sqrt{25} = -5$	Die Wurzel aus 25 ist -5.

STOPP !!! Das kann nicht sein:

In der gelben Zeile steht, dass die Wurzel aus 25 die Zahl 5 ist.

In der orangenen Zeile steht, dass die Wurzel aus 25 -5 ist.

Damit kann niemand etwas anfangen:

Eine Rechenoperation muss ein eindeutiges Ergebnis haben!

Daher gibt es diese Zusatzvereinbarung:

Die (Quadrat)wurzel aus einer Zahl darf nie negativ sein!

So wie man eine Addition durch eine Subtraktion rückgängig machen kann: $3\,\boxed{+5}=8 \;\Rightarrow\; 8\,\boxed{-5}=3$

und eine Multiplikation durch eine Division: $3\,\boxed{\cdot 5}=15 \;\Rightarrow\; 15\,\boxed{:5}=3$

kann man Quadrieren durch „Ziehen einer Quadratwurzel“ (= Radizieren) rückgängig machen.

Wie wir gesehen haben, taucht dabei aber dieses Problem auf:

$2 \xrightarrow[\text{quadrieren}]{} 4$

$-2 \xrightarrow[\text{quadrieren}]{} 4$

umkehren: $4 \xrightarrow[\text{Wurzel ziehen}]{} 2$ Man schreibt: $\sqrt{4}=2$

umkehren nicht möglich : $4 \xrightarrow[\text{Wurzel ziehen}]{} \cancel{-2}$ falsch ist also $\cancel{\sqrt{4}=-2}$

Man muss sich also merken, dass man das Quadrieren von negativen Zahlen durch Wurzelziehen nicht rückgängig machen kann.

Das musst du unbedingt wissen:

1. **Quadrieren ergibt nie eine negative Zahl, sondern nur Zahlen ≥ 0.**
2. **Die Umkehrung (das Ziehen einer Quadratwurzel) ist daher auch nie aus negativen Zahlen möglich: $\sqrt{a}$ geht nur , wenn $a \geq 0$ ist.**
3. **Das Ergebnis, also die Quadratwurzel ist nie eine negative Zahl: $\sqrt{a} \geq 0$**
4. **Achtung: $\sqrt{a^2} = |a|$ Falsch wäre $\sqrt{a^2}=a$, wenn a negativ ist, denn sonst wäre ja z. B. $\cancel{\sqrt{(-2)^2}=-2}$**

LERNE DRINGEND AUSWENDIG:

$1^2=1$	also	$\sqrt{1}=1$
$2^2=4$	also	$\sqrt{4}=2$
$3^2=9$	also	$\sqrt{9}=3$
$4^2=16$	also	$\sqrt{16}=4$
$5^2=25$	also	$\sqrt{25}=5$
$6^2=36$	also	$\sqrt{36}=6$
$7^2=49$	also	$\sqrt{49}=7$
$8^2=64$	also	$\sqrt{64}=8$
$9^2=81$	also	$\sqrt{81}=9$
$10^2=100$	also	$\sqrt{100}=10$
$11^2=121$	also	$\sqrt{121}=11$
$12^2=144$	also	$\sqrt{144}=12$
$13^2=169$	also	$\sqrt{169}=13$
$14^2=196$	also	$\sqrt{196}=14$
$15^2=225$	also	$\sqrt{225}=15$
$16^2=256$	also	$\sqrt{256}=16$

2 Quadrieren von Quadratwurzeln

Wir haben gesehen, dass das Ziehen einer Quadratwurzel die Umkehrung vom Quadrieren ist:

$$\underbrace{2 \xrightarrow{\text{quadr.}} 4}_{2^2=4} \quad \text{und daher} \quad \underbrace{4 \xrightarrow[\text{Wurzel ziehen}]{\text{Umkehrung}} 2}_{\sqrt{4}=2}$$

Oder umgekehrt: **Quadrieren ist die Umkehrung vom Wurzelziehen:**

$4 \xrightarrow[\text{Wurzel ziehen}]{} \sqrt{4}$	Umkehrung:	$\sqrt{4} \xrightarrow{\text{quadr.}} 4$	oder so:	$\sqrt{4}^2 = 4$
$3 \xrightarrow[\text{Wurzel ziehen}]{} \sqrt{3}$	Umkehrung:	$\sqrt{3} \xrightarrow{\text{quadr.}} 3$	oder so:	$\sqrt{3}^2 = 3$
$12 \xrightarrow[\text{Wurzel ziehen}]{} \sqrt{12}$	Umkehrung:	$\sqrt{12} \xrightarrow{\text{quadr.}} 12$	oder so:	$\sqrt{12}^2 = 12$

Auch wenn (noch) nicht wissen, welche Zahl $\sqrt{3}$ oder $\sqrt{12}$ ist, so kann man doch sagen:

$\sqrt{3}$ ist diejenige positive Zahl, deren Quadrat 3 ist: $\sqrt{3}^2 = 3$

$\sqrt{12}$ ist diejenige positive Zahl, deren Quadrat 12 ist: $\sqrt{12}^2 = 12$

$\sqrt{\frac{1}{3}}$ ist diejenige positive Zahl, deren Quadrat $\frac{1}{3}$ ist: $\sqrt{\frac{1}{3}}^2 = \frac{1}{3}$

Also sollte man sich merken:

$\sqrt{a}$ ist diejenige positive Zahl, deren Quadrat a ist: $\sqrt{a}^2 = a$

Und dazu gehört: $\sqrt{a}$ existiert nur dann, wenn $a \geq 0$ ist.

Ist a > 0, dann ist $\sqrt{a} > 0$.

Ist a = 0, dann ist $\sqrt{0} = 0$.

Ist a < 0. dann ist $\sqrt{a}$ keine reelle Zahl.

$\sqrt{a}^2 = a$ d. h. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$

3 Multiplikation von Quadratwurzeln

Eine wichtige Regel für das Rechnen mit Quadratwurzeln ist diese: $\boxed{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b} \qquad (P1)}$

Etwa: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$ oder $\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{15}$ usw.

Wir wollen nun überlegen, wieso diese Regel stimmt.

Wir hatten gesehen, dass $\sqrt{6}$ diejenige nicht negative Zahl ist, deren Quadrat 6 ist: $\sqrt{6}^2=6$

oder anders geschrieben: $\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}=6$.

Nun untersuchen wir $a=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$, indem wir a quadrieren:

$$a^2=a\cdot a=\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\right)$$

Bei der Multiplikation darf mit man Klammern anders zusammenfassen:

$$a^2=\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\right)=\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{3}$$

Und man darf Faktoren vertauschen: $\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$

$$a^2=\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{3}$$

Nun ändere ich die Klammern wieder:

$$a^2=\underbrace{\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\right)}_{2}\cdot\underbrace{\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\right)}_{3}=6$$

Das heißt doch aber: Wenn $a^2=6$ ist, dann ist $a=\sqrt{6}$!

Also haben wir gezeigt: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{6}$

Das kann man für beliebige Zahlen so machen, woraus wir sehen, dass die Formel (P1) stimmt.

Wir wenden diese Formel nun auf verschiedene Situationen an:

1. Anwendung: Manche Produkte von Wurzeln kann man damit direkt berechnen

Oft kann man aus zwei Wurzeln, die sich nicht ganzzahlig berechnen lassen, ein Produkt berechnen, aus dem sich die Wurzel ziehen lässt!

(a) $\sqrt{2}$ und $\sqrt{8}$ haben keine genau angebbaren Ergebnisse.

Aber ihr Produkt können wir jetzt berechnen: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=\sqrt{2\cdot 8}=\sqrt{16}=4$

(b) $\sqrt{10}\cdot\sqrt{2{,}5}=\sqrt{10\cdot 2{,}5}=\sqrt{25}=5$

(c) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}=\sqrt{3\cdot 12}=\sqrt{36}=6$

(d) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{72}=\sqrt{2\cdot 72}=\sqrt{144}=12$

(e) $\sqrt{27}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{81}=9$

(f) $\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}=\sqrt{100}=10$

(g) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{3\cdot 6\cdot 2}=\sqrt{36}=6$

2. Anwendung: Umgekehrt kann man manche Wurzeln zerlegen:

Dazu wendet man sie in der entgegengesetzten Richtung an: $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ (P2)

a) $\sqrt{3600} = \sqrt{36 \cdot 100} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{100} = 6 \cdot 10 = 60$

b) $\sqrt{9000000} = \sqrt{9 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 100} = 3 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot = 3000$

c) $\sqrt{0{,}09} = \sqrt{9 \cdot 0{,}01} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{0{,}01} = 3 \cdot 0{,}1 = 0{,}3$ denn $0{,}1^2 = 0{,}01 \Rightarrow \sqrt{0{,}01} = 0{,}1$

d) $\sqrt{196} = \sqrt{4 \cdot 49} = ?$

Löse selbst: e) $\sqrt{400} = ?$ f) $\sqrt{2500} = ?$ g) $\sqrt{484} = ?$

Die Lösungen findest du auf der nächsten Seite!

3. Anwendung: Partielles Wurzelziehen

Manchmal kann man eine der beiden bei der Zerlegung entstandenen Wurzeln nicht ziehen aber dennoch eine sinnvolle Vereinfachung vornehmen:

a) $\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4 \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

b) $\sqrt{99} = \sqrt{9 \cdot 11} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{11} = 3\sqrt{11}$

c) $\sqrt{243} = \sqrt{81 \cdot 3} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

d) $\sqrt{200} = \sqrt{2 \cdot 100} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{2} = 10 \cdot \sqrt{2}$

TRICK:
Suche zuerst immer Quadratzahlen als Teiler des Radikanden - dann zerlege die Wurzel!

Versuche es selbst:

e) $\sqrt{180}$ f) $\sqrt{28}$ g) $\sqrt{98}$ h) $\sqrt{120}$

4. Anwendung: Berechnung von Produkten durch partielles Wurzelziehen

Das ist im Grund dasselbe wie die 3. Anwendung, nur, dass man am Ende noch weiterrechnen kann.

a) $\sqrt{32} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{16 \cdot 2} \cdot \sqrt{9 \cdot 2} = 4 \cdot \sqrt{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{2} = 12 \cdot \boxed{2} = 24$ denn $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \boxed{2}$

Du sieht, dass man beide Wurzeln teilweise ziehen kann, und dass man anschließend sogar die Wurzeln zum Verschwinden bringt. Da gelingt aber nicht immer:

b) $\sqrt{28} \cdot \sqrt{175} = \sqrt{4 \cdot 7} \cdot \sqrt{7 \cdot 25} = 2 \cdot \underbrace{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}}_{7} \cdot 5 = 10 \cdot \boxed{7} = 70$ denn $\sqrt{7} \cdot \sqrt{7} = \boxed{7}$

c) $\sqrt{147} \cdot \sqrt{27} = \sqrt{49 \cdot 3} \cdot \sqrt{3 \cdot 9} = 7 \cdot \underbrace{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}_{3} \cdot 3 = 7 \cdot 3 \cdot 3 = 63$

d) $\sqrt{50} \cdot \sqrt{98} = \sqrt{25 \cdot 2} \cdot \sqrt{49 \cdot 2} = 5 \cdot \underbrace{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}_{2} \cdot 7 = 5 \cdot 2 \cdot 7 = 70$

e) $\sqrt{722} \cdot \sqrt{288} = \sqrt{2 \cdot 361} \cdot \sqrt{2 \cdot 144} = 19 \cdot \underbrace{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}_{2} \cdot 12 = 19 \cdot 2 \cdot 12 = 456$

f) $\sqrt{48} \cdot \sqrt{50} = \sqrt{16 \cdot 3} \cdot \sqrt{2 \cdot 25} == 4 \cdot \underbrace{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}_{\sqrt{6}} \cdot 5 = 20 \cdot \sqrt{6}$ Hier bleibt die Wurzel übrig.

Löse selbst:

g) $\sqrt{24} \cdot \sqrt{18}$ h) $\sqrt{63} \cdot \sqrt{28}$ i) $\sqrt{60} \cdot \sqrt{75}$ k) $\sqrt{72} \cdot \sqrt{32}$

Lösung zu 2.

d) $\sqrt{196} = \sqrt{4 \cdot 49} = \underbrace{\sqrt{4} \cdot \sqrt{49}}_{\text{unnötig}} = 2 \cdot 7 = 14$ +

e) $\sqrt{400} = \sqrt{4 \cdot 100} = 2 \cdot 10 = 20$

f) $\sqrt{2500} = \sqrt{25 \cdot 100} = 5 \cdot 10 = 50$

g) $\sqrt{484} = \sqrt{4 \cdot 121} = 2 \cdot 11 = 22$

Lösung zu 3:

e) $\sqrt{180} = \sqrt{36 \cdot 5} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{5} = 6 \cdot \sqrt{5}$ oder

$\sqrt{180} = \sqrt{9 \cdot 20} = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 5} = 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} = 6 \cdot \sqrt{5}$

f) $\sqrt{28} = \sqrt{4 \cdot 7} = 2 \cdot \sqrt{7}$

g) $\sqrt{98} = \sqrt{49 \cdot 2} = 7 \cdot \sqrt{2}$

h) $\sqrt{120} = \sqrt{4 \cdot 30} = 2\sqrt{30}$

Lösung zu 4:

g) $\sqrt{24} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{4 \cdot 6} \cdot \sqrt{6 \cdot 3} = 2 \cdot \underbrace{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}}_{6} \cdot \sqrt{3} = 12 \cdot \sqrt{3}$

h) $\sqrt{63} \cdot \sqrt{28} = \sqrt{9 \cdot 7} \cdot \sqrt{4 \cdot 7} = 3 \cdot \underbrace{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}}_{7} \cdot 2 = 42$

i) $\sqrt{60} \cdot \sqrt{75} = \sqrt{4 \cdot 15} \cdot \sqrt{5 \cdot 15} = 2 \cdot \underbrace{\sqrt{15} \cdot \sqrt{15}}_{15} \cdot \sqrt{5} = 30 \cdot \sqrt{5}$

k) $\sqrt{72} \cdot \sqrt{32} = \sqrt{36 \cdot 2} \cdot \sqrt{16 \cdot 2} = 6 \cdot \sqrt{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{2} = 24 \cdot \underbrace{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}_{2} = 28$

5. Anwendung: Mehrfaches partielles Wurzelziehen

Manche Radikanden sind so groß, dass es nicht in einem Schritt gelingt, die Wurzel partiell zu ziehen. Wie man dann vorgehen kann, zeigen diese Beispiele:

a) $\sqrt{3380}$ Hier muss man wissen: Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn die aus den letzten Ziffern gebildete Zahl es ist. Weil 80 durch 4 teilbar ist, ist auch 3380 durch 4 teilbar:

$\sqrt{3380} = \sqrt{4 \cdot 845} = 2\sqrt{845}$

5 ist ein Teiler von 845: $845 = 5 \cdot 169$. Also geht es so weiter:

$\sqrt{3380} = \sqrt{4 \cdot 845} = 2\sqrt{5 \cdot 169} = 2 \cdot 13 \cdot \sqrt{5} = 26\sqrt{5}$.

denn wegen $13^2 = 169$ ist $\sqrt{169} = 13$.

b) $\sqrt{4320} = \sqrt{4 \cdot 1080} = \sqrt{4 \cdot 4 \cdot 270} = 4 \cdot \sqrt{270} = 4 \cdot \sqrt{9 \cdot 30} = 4 \cdot 3 \cdot \sqrt{30} = 12 \cdot \sqrt{30}$

c) $\sqrt{9600} = \sqrt{96 \cdot 100} = \sqrt{16 \cdot 6} \cdot 10 = 4 \cdot \sqrt{6} \cdot 10 = 40\sqrt{6}$

4 Division von Quadratwurzeln

Die Quotientenformel: $$\boxed{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \qquad (Q1)}$$

Diese Formel ist ganz analog zur Produktformel (P1) aufgebaut.

Anwendung: Man kann manche Quotienten (Brüche) aus Wurzeln direkt berechnen:

a) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = ?$ Nach (Q1) dürfen wir daraus eine Wurzel machen:

$= \sqrt{\frac{50}{2}}$ Jetzt können wir vereinfachen durch Kürzen:

$= \sqrt{25} = 5$ und schon ist man fertig.

b) $\frac{\sqrt{1000}}{\sqrt{40}} = ?$ Nach (Q1) eine unter eine Wurzel schreiben:

$= \sqrt{\frac{1000}{40}}$ Jetzt vereinfacht man, indem man z. B. durch 10 kürzt:f)

$= \sqrt{\frac{100}{4}} = \sqrt{25} = 5$ Normalerweise schreibt man diese Berechnung in eine Zeile:

c) $\frac{\sqrt{245}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{245}{5}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 49}{5}} = \sqrt{49} = 7$

d) $\frac{\sqrt{343}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{343}{7}} = \sqrt{49} = 7$ Hier wurde durch 7 gekürzt

Durch das Schreiben unter eine gemeinsame Wurzel kann man den Bruch kürzen, so dass anschließend die Wurzel gezogen werden kann.

Soll man die Wurzel aus einem Bruch stehen, dann benötigt man die gespiegelte Formel

$$\boxed{\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \qquad (Q2)}$$

e) $\sqrt{\frac{64}{9}}$ zerlegt man in $= \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{9}}$ und zieht dann die Wurzeln aus Zähler und Nenner: $= \frac{8}{3}$ -

f) $\sqrt{\frac{288}{50}} = \sqrt{\frac{\cancel{2} \cdot 144}{\cancel{2} \cdot 25}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{25}} = \frac{12}{5}$

Aufgaben zum Üben:

g) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = ?$ h) $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}} = ?$ i) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{8}} = ?$ j) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{12}} = ?$

k) $\sqrt{\frac{108}{48}} = ?$ l) $\sqrt{\frac{147}{75}} = ?$ m) $\sqrt{\frac{405}{80}} = ?$

Lösungen.

g) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2$ mit Q1

h) $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{54}{6}} = \sqrt{9} = 3$ mit Q1

i) $\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{8}} \overset{Q1}{=} \sqrt{\frac{50}{8}} \overset{\text{kürzen}}{=} \sqrt{\frac{25}{4}} \overset{Q2}{=} \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}} = \frac{5}{2}$ mit Q1 und Q2

j) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{12}} \overset{Q1}{=} \sqrt{\frac{27}{12}} \overset{\text{kürzen}}{=} \sqrt{\frac{9}{4}} \overset{Q2}{=} \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$

k) $\sqrt{\frac{108}{48}} \overset{\text{kürzen}}{=} \sqrt{\frac{9\cdot 12}{4\cdot 12}} = \sqrt{\frac{9}{4}} \overset{Q2}{=} \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$

l) $\sqrt{\frac{147}{75}} \overset{\text{kürzen}}{=} \sqrt{\frac{49\cdot 3}{25\cdot 3}} = \sqrt{\frac{49}{25}} \overset{Q2}{=} \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{25}} = \frac{7}{5}$

m) $\sqrt{\frac{405}{80}} \overset{\text{kürzen}}{=} \sqrt{\frac{81\cdot 5}{16\cdot 5}} = \sqrt{\frac{81}{16}} \overset{Q2}{=} \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{16}} = \frac{9}{4}$

Weitere Anwendung: Berechnung von Wurzeln aus kleinen Zahlen

a) $\sqrt{0{,}000009}$ Man verwandelt diese Zahl in einen **Bruch**. Dabei sollte im Nenner eine Quadratzahl stehen, also 100 oder 10.000 oder 1.000.000. Dann wird die Wurzel mit (Q2) zerlegt:

$$\sqrt{0{,}000009} = \sqrt{\frac{9}{1.000.000}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{1|00|00|00}} = \frac{3}{1000} = 0{,}003$$

Dieses Verfahren lässt sich durch Abzählen der Nullen und Setzen von Trennungsstrichen für Zweierpakete abkürzen. Jedes Zweierpaket (Nullgruppe) ergibt eine Dezimalstelle:

$$\boxed{\sqrt{0{,}\underbrace{00}_{0}|\underbrace{00}_{0}|\underbrace{09}_{3}} = 0{,}003}$$

b) $\sqrt{0{,}00004}$ Hier vermutet man beim schnellen hinsehen ein Ergebnis der Form 0,…2. Es gibt jedoch gleich eine herbe Enttäuschung:

$$\sqrt{0{,}00|00|40} = \sqrt{\frac{40}{1|00|00|00}} = \frac{\sqrt{40}}{1000} = \frac{?}{1000}$$

Das Einteilen in Zweierpakete vom Komma aus führt nicht zur Quadratzahl 4 sondern zu 40.
Die Null hinter der 4 muss man setzen, **damit drei Zweierpakete entstehen**.
Nur dann kommt man zum Nenner 1.000.000, also zu Tausendstel nach dem Wurzelziehen.

Zusatzaufgabe:

Einige Seiten zuvor habe ich die Interessierten gezeigt, wie man an einem Beispiel erklären kann, warum die Produktformel P1 richtige Ergebnisse liefert.
Du kannst nun versuchen, auf ähnliche Weise die Richtigkeit der Quotientenformel Q1 zu beweisen-
Ich zeige dir meine Rechnung dazu auf der letzten Seite dieses Textes.

5 Addition und Subtraktion von Quadratwurzeln

Wurzeln kann man nicht so addieren und subtrahieren, wie man sie multiplizieren und dividieren darf!

Schauen wir uns Beispiele an:

Multiplikation: $\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}=\sqrt{3\cdot7}=\sqrt{21}$ Regel: $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$ (P1)

Division: $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{3}{7}}$ Regel $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$ (Q1)

Addition: $\cancel{\sqrt{5}+\sqrt{11}=\sqrt{5+11}=\sqrt{16}=4}$ *ist falsch!*

denn $\sqrt{5}+\sqrt{11}\approx 2{,}236+3{,}316\approx 5{,}55$ *aber nicht 4!*

Subtraktion: $\cancel{\sqrt{31}-\sqrt{6}=\sqrt{31-6}=\sqrt{25}=5}$ *ist auch falsch!*

denn $\sqrt{31}-\sqrt{6}\approx 5{,}568-2{,}245\approx 3{,}1$ *aber nicht 5!*

Die Gleichungen $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$ und $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{a-b}$ sind also **keine Regeln**, weil sie **meistens** falsche Ergebnisse liefern.

Fällt dir auf, dass hier „meistens" steht? Das bedeutet, dass diese Gleichung in Ausnahmefällen richtige Werte liefern kann, etwa in dieser Rechnung:

$$\sqrt{3}\pm\sqrt{0}=\sqrt{3\pm0}=\sqrt{3}$$

In besonderen Fällen kommt zwar ein richtiges Ergebnis heraus, doch meistens nicht.:

Wenn gleiche Wurzeln im Spiel sind, kann man zusammenfassen!

a) $\sqrt{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

b) $5\sqrt{3}+2\sqrt{3}=(5+2)\sqrt{3}=7\sqrt{3}$ *Man klammert die Wurzel aus und addiert die Faktoren!*

c) $12\sqrt{7}-5\sqrt{7}=(12-5)\sqrt{7}=7\sqrt{7}$

d) $13\sqrt{5}+2\sqrt{5}-9\sqrt{5}=(13+2-9)\sqrt{5}=6\sqrt{5}$

e) $\sqrt{12}+\sqrt{27}=\sqrt{4\cdot3}+\sqrt{9\cdot3}=2\sqrt{3}+3\sqrt{3}=(2+3)\sqrt{3}=5\sqrt{3}$

f) $\sqrt{45}+\sqrt{80}=\sqrt{9\cdot5}+\sqrt{16\cdot5}=3\sqrt{5}+4\sqrt{5}=(3+4)\sqrt{5}=7\sqrt{5}$

g) $\sqrt{99}-\sqrt{44}=\sqrt{9\cdot11}-\sqrt{4\cdot11}=3\sqrt{11}-2\sqrt{11}=(3-2)\sqrt{11}=1\cdot\sqrt{11}=\sqrt{11}$

h) $5\sqrt{63}+\sqrt{175}-5\sqrt{112}=5\sqrt{9\cdot7}+\sqrt{25\cdot7}-5\sqrt{16\cdot7}=15\sqrt{7}+5\sqrt{7}-20\sqrt{7}=0\sqrt{7}=0$

MERKE:

Vielfache von Wurzeln lassen sich addieren bzw. subtrahieren, wenn diese **Wurzeln gleich** sind oder sich durch teilweises Ziehen von Wurzeln in gleichen Wurzeln umformen lassen.

Das Zusammenfassen geschieht dann durch **Ausklammern** der Wurzel.

Nachtrag:

Wir kann man zeigen, dass die Quotientenformel $\boxed{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad (Q1)}$ richtige Ergebnisse liefert?

Nach der Definition ist $\sqrt{\frac{5}{6}}$ die Zahl, deren Quadrat $\frac{5}{6}$ ergibt: $\sqrt{\frac{5}{6}} \cdot \sqrt{\frac{5}{6}} = \frac{5}{6}$

Nun untersuchen wir $a = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$, indem wir a quadrieren:

$$a^2 = a \cdot a = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$$

Die Multiplikation von zwei Brüchen ist klar:

$$a^2 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}}$$

Jetzt werden Zähler und Nenner berechnet:

$\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 5$ und $\sqrt{6} \cdot \sqrt{6} = 6$:

$$a^2 = .. = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{5}{6}$$

Das heißt doch aber: Wenn $a^2 = \frac{5}{6}$ ist, dann ist $a = \sqrt{\frac{5}{6}}$!

Also haben wir gezeigt: $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{5}{6}}$